

**EPFL****1**

Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Date : vendredi 19 décembre 2025
Durée : 210 minutes

Examen à blanc - Corrigé

NOM:

PRENOM:

N° SCIPER:

SECTION: **Mathématiques**

SALLE:

L'examen est constitué de 3 problèmes qui totalisent 39 points. Chaque problème comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques d'un problème doivent être effectués et rédigés proprement sur les pages quadrillées à la fin du problème.

Consignes

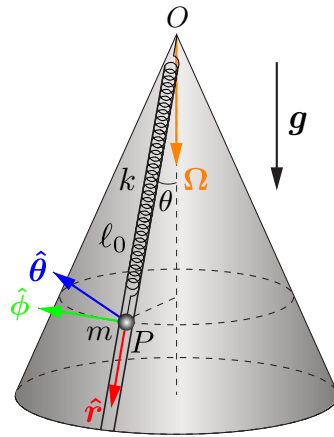
- Préparer votre **carte Camipro**, la poser visiblement sur la table et vérifier votre N° Sciper.
- **Attendre** le début de l'épreuve **avant d'ouvrir** le cahier d'examen.
- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Un **dictionnaire bilingue** non annoté est autorisé pour les étudiant.e.s **non francophones**.
- Effectuer les **développements mathématiques et physiques** d'un problème sur les **pages quadrillées** à la fin du problème.
- Retranscrire les **réponses** sur les pointillés sous chaque question dans les espaces réservés à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Ne **pas dégrafer** le cahier d'examen et laisser le **tableau** et les **cases blanches vides**.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas ramassées** et **pas corrigées**.
- Il est recommandé de résoudre les questions **bonus** à la fin de l'examen si le temps le permet.



Problème 1 : Bille oscillant sur un cône en rotation (21 points)

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Laisser les cases blanches vides



Une bille considérée comme un point matériel P de masse m est suspendu à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 . La partie supérieure du ressort est fixée à l'origine O au sommet d'un cône vertical de demi angle d'ouverture θ constant par rapport à son axe de symétrie vertical. Un moteur fait tourner le cône autour de son axe de symétrie à vitesse angulaire Ω constante dans le sens horaire en vue d'avion. Une rainure le long du cône empêche la bille d'avoir un mouvement relatif horizontal par rapport au cône. Ainsi, lorsqu'elle est en contact avec le cône son mouvement est purement radial par rapport au référentiel relatif du cône. On suppose que la bille coulisse sans frottement à l'intérieur de la rainure et que les valeurs des grandeurs physiques sont telles que la bille reste en permanence en contact avec le cône.

Pour décrire la dynamique de la bille sur le cône en rotation, on considère deux référentiels : le référentiel d'inertie absolu \mathcal{R} du sol et le référentiel accéléré relatif \mathcal{R}' du cône en rotation. On choisit un repère sphérique relatif $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ où le vecteur unitaire radial \hat{r} est orienté radialement vers la base du cône, le vecteur unitaire nodal $\hat{\theta}$ est orthogonal au plan tangent au cône et orienté vers l'extérieur, et le vecteur unitaire azimutal $\hat{\phi}$ est orienté horizontalement dans le sens horaire. On choisit le sommet du cône O comme origine du repère relatif sphérique.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse m de la bille, de la constante élastique k du ressort, de sa longueur à vide ℓ_0 , de la vitesse angulaire scalaire Ω de rotation du cône, de la norme du champ gravitationnel g , des coordonnées sphériques relatives r, θ et ϕ , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{r}, \hat{\theta}$ et $\hat{\phi}$ du repère sphérique et des grandeurs spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (3 points) Déterminer la force centrifuge F_c et la force de Coriolis F_C exercées sur la bille dans le référentiel relatif \mathcal{R}' du cône.

Les contraintes géométriques imposées sur les coordonnées sphériques par le cône de sommet O et de demi-angle d'ouverture θ sont les suivantes,

$$\begin{aligned} \theta = \text{cste} & \quad \text{ainsi} \quad \dot{\theta} = 0 & \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = 0, \\ \phi = \text{cste} & \quad \text{ainsi} \quad \dot{\phi} = 0 & \quad \text{et} \quad \ddot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Compte tenu des contraintes géométriques (1), la position relative $\mathbf{r}_r(P)$, la vitesse relative $\mathbf{v}_r(P)$ et l'accélération relative $\mathbf{a}_r(P)$ de la bille s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r(P) &= r \hat{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{v}_r(P) &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{a}_r(P) &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ s'écrit en coordonnées sphériques,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3)$$

Compte tenu de la position relative (2) et de la vitesse angulaire (3), la force centrifuge s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= -m \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)) = -mr \Omega^2 (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times ((\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \\ &= -mr \Omega^2 \sin \theta (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\boldsymbol{\phi}} = mr \Omega^2 \sin \theta (\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr \sin \theta \Omega^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Au vu de la vitesse relative (2) et de la vitesse angulaire (3), la force de Coriolis est,

$$\mathbf{F}_C = -2m \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_r(P) = -2m \dot{r} \Omega (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \times \hat{\mathbf{r}} = -2m \dot{r} \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (5)$$

2. (5 points) Déterminer le vecteur force de réaction normale \mathbf{N} exercé par le cône sur la bille.

Les forces extérieures exercées sur la bille sont son poids \mathbf{P} , la force élastique \mathbf{F}_e exercée par le ressort et la force de réaction normale \mathbf{N} exercée par le cône. Le poids s'écrit,

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g} = mg (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}), \quad (6)$$

et la force élastique est exprimée comme,

$$\mathbf{F}_e = -k \mathbf{d} = -k(r - \ell_0) \hat{\mathbf{r}}. \quad (7)$$

Compte tenu des contraintes géométriques (1), le vecteur force de réaction normale a la forme suivante,

$$\mathbf{N} = N_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (8)$$

Solution 1: La loi du mouvement relatif de la bille dans le référentiel relatif \mathcal{R}' du cône en rotation s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}^{\text{in}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{N} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_C = m \mathbf{a}_r(P). \quad (9)$$

En substituant les forces extérieures (9), (7) et (8), les forces d'inertie (4) et (5), et l'accélération relative (2) dans la loi du mouvement relatif (9) et en la projetant selon les lignes de coordonnées sphériques, on obtient les équations scalaires suivantes,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{r}} : \quad mg \cos \theta - k(r - \ell_0) + mr \Omega^2 \sin^2 \theta = m\ddot{r}, \quad (\text{question suivante}) \quad (10)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : \quad -mg \sin \theta + N_\theta + mr \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (11)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad N_\phi - 2m\dot{r}\Omega \sin \theta = 0. \quad (12)$$



Les équations de contraintes (11) et (12) donnent les composantes de la force de réaction normale (8),

$$\mathbf{N} = m (g - r \Omega^2 \cos \theta) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2 m \dot{r} \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (13)$$

Solution 2: Compte tenu des contraintes géométriques (1), l'accélération absolue de la bille s'écrit,

$$\mathbf{a}_a(P) = (\ddot{r} - r \Omega^2 \sin^2 \theta) \hat{\mathbf{r}} - r \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2 \dot{r} \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (14)$$

La loi du mouvement absolu de la bille dans le référentiel absolu \mathcal{R} du sol s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{N} = m \mathbf{a}_a(P). \quad (15)$$

En substituant les forces extérieures (9), (8) et l'accélération absolue (14) dans la loi du mouvement absolu (15) et en la projetant selon les lignes de coordonnées sphériques, on obtient les équations scalaires suivantes,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{r}} : mg \cos \theta - k(r - \ell_0) = m(\ddot{r} - r \Omega^2 \sin^2 \theta), \quad (\text{question suivante}) \quad (16)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : -mg \sin \theta + N_\theta = -mr \Omega^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (17)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : N_\phi = 2m\dot{r}\Omega \sin \theta. \quad (18)$$

Les équations de contraintes (17) et (18) donnent les composantes de la force de réaction normale (8),

$$\mathbf{N} = m (g - r \Omega^2 \cos \theta) \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 2 m \dot{r} \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (19)$$

3. (1 point) Montrer que l'équation du mouvement relatif de la bille sur le cône s'écrit,

$$\ddot{r} - r \Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{k}{m} (r - \ell_0) - g \cos \theta = 0.$$

En divisant l'équation du mouvement (10) selon la coordonnée radiale par la masse m , on obtient,

$$\ddot{r} = g \cos \theta - \frac{k}{m} (r - \ell_0) + r \Omega^2 \sin^2 \theta. \quad (20)$$

4. (2 points) Déterminer l'inéquation qui doit être satisfaite par la vitesse angulaire scalaire Ω pour que la bille ne décolle pas.

Comme la bille coulisse dans la rainure, elle peut décoller que dans le plan vertical de la rainure lorsque la composante nodale de la force de réaction normale s'annule. La condition pour que la bille ne décolle pas est,

$$N_\theta = m \sin \theta (g - r \Omega^2 \cos \theta) > 0. \quad (21)$$

Ainsi, pour une vitesse angulaire de rotation du cône qui est suffisamment faible la bille ne décollera pas,

$$\Omega < \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta}}. \quad (22)$$

5. (3 points) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre r_0 et la condition à satisfaire pour qu'elle soit stable.

L'équation du mouvement radial de la bille (20) peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \sin^2 \theta \right) r = \frac{k}{m} \ell_0 + g \cos \theta. \quad (23)$$

En évaluant l'équation du mouvement à l'équilibre dans le référentiel relatif du cône,

$$r = r_0 = \text{cste} \quad \text{et} \quad \ddot{r} = 0, \quad (24)$$



on obtient la coordonnée radiale d'équilibre,

$$r_0 = \frac{\frac{k}{m} \ell_0 + g \cos \theta}{\frac{k}{m} - \Omega^2 \sin^2 \theta}. \quad (25)$$

A l'aide de la coordonnée de déviation radiale définie comme,

$$\rho = r - r_0 \quad \text{ainsi} \quad \ddot{r} = \ddot{\rho}, \quad (26)$$

l'équation du mouvement (23) est mise sous la forme suivante,

$$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2 \sin^2 \theta \right) \rho = 0, \quad (27)$$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que le mouvement de la bille au voisinage de l'équilibre soit un mouvement harmonique oscillatoire de pulsation au carré,

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \Omega^2 \sin^2 \theta > 0. \quad (28)$$

Ainsi, pour que l'équilibre soit stable, il faut que la vitesse angulaire satisfasse la condition,

$$\Omega < \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (29)$$

6. (1 point) Déterminer la période des oscillations autour de la position d'équilibre stable r_0 .

La période d'oscillation est déduite de la pulsation (28) du mouvement harmonique oscillatoire,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2 \sin^2 \theta}}. \quad (30)$$

7. (2 points) Montrer que la grandeur scalaire H donnée ci-dessous est constante,

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2 - mgr \cos \theta.$$

Solution 1: L'équation du mouvement (20) multipliée par $m \dot{r}$ s'écrit,

$$m \dot{r} \ddot{r} - m \Omega^2 \sin^2 \theta r \dot{r} + k (r - \ell_0) \dot{r} - mg \cos \theta \dot{r} = 0. \quad (31)$$

Compte tenu des grandeurs infinitésimales $dr = \dot{r} dt$ et $d\dot{r} = \ddot{r} dt$, l'intégrale par rapport au temps de $t' = 0$ à $t' = t$ de l'équation différentielle du mouvement (31) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal dt s'écrit,

$$m \int_{\dot{r}(0)}^{\dot{r}(t)} \dot{r}' d\dot{r}' - m \Omega^2 \sin^2 \theta \int_{r(0)}^{r(t)} r' dr' + k \int_{r(0)}^{r(t)} (r' - \ell_0) dr' - mg \cos \theta \int_{r(0)}^{r(t)} dr = 0. \quad (32)$$

La solution de cette intégrale est,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m (\dot{r}^2(t) - \dot{r}^2(0)) - \frac{1}{2} m \Omega^2 \sin^2 \theta (r^2(t) - r^2(0)) \\ & + \frac{1}{2} k ((r(t) - \ell_0)^2 - (r(0) - \ell_0)^2) - mg \cos \theta (r(t) - r(0)) = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

ce qui implique que la grandeur,

$$H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t) - \frac{1}{2} m r^2(t) \Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} k (r(t) - \ell_0)^2 - mgr(t) \cos \theta, \quad (34)$$

est constante.



Solution 2: La dérivée temporelle de la grandeur H s'écrit,

$$\dot{H} = m \dot{r} \ddot{r} - m r \dot{r} \Omega^2 \sin^2 \theta + k (r - \ell_0) \dot{r} - mg \dot{r} \cos \theta. \quad (35)$$

A l'aide de l'équation du mouvement relatif de la bille (20), on en conclut que la dérivée temporelle de l'expression (35) pour la grandeur H est nulle,

$$\dot{H} = (m \ddot{r} - m r \Omega^2 \sin^2 \theta + k (r - \ell_0) - mg \cos \theta) \dot{r} = 0, \quad (36)$$

ce qui démontre que la grandeur H est constante.

8. (4 points) Déterminer l'énergie mécanique E de la bille par rapport au référentiel d'inertie absolu \mathcal{R} du sol en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal contenant l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort à vide. Montrer que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique s'écrit,

$$\dot{E} = -\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}_a(P),$$

où $\mathbf{v}_a(P)$ est la vitesse absolue de la bille.

Compte tenu des contraintes géométriques (1), la vitesse absolue de la bille est,

$$\mathbf{v}_a(P) = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (37)$$

L'énergie cinétique de la bille est,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_a^2(P) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta. \quad (38)$$

L'énergie potentielle de la bille est la somme de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur,

$$V = \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2 - mgr \cos \theta. \quad (39)$$

Par conséquent, l'énergie mécanique de la bille s'écrit,

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} k (r - \ell_0)^2 - mgr \cos \theta. \quad (40)$$

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique de la bille est,

$$\dot{E} = (m \ddot{r} + m r \Omega^2 \sin^2 \theta + k (r - \ell_0) - mg \cos \theta) \dot{r}. \quad (41)$$

Compte tenu de l'équation du mouvement (10), la dérivée temporelle de l'énergie (41) se réduit à,

$$\dot{E} = 2 m r \dot{r} \Omega^2 \sin^2 \theta. \quad (42)$$

Le produit scalaire de la force de Coriolis (5) avec la vitesse absolue (37) s'écrit,

$$\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}_a(P) = (-2 m \dot{r} \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}) \cdot (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \Omega \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}) = -2 m r \dot{r} \Omega^2 \sin^2 \theta, \quad (43)$$

Par conséquent, on en conclut que,

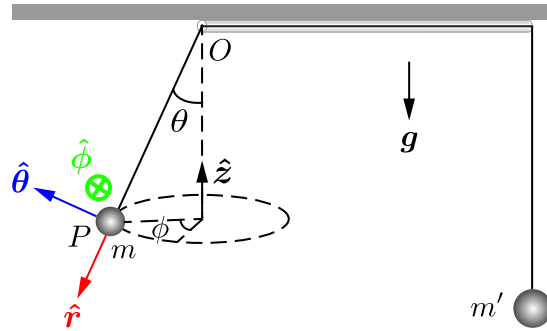
$$\dot{E} = -\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}_a(P). \quad (44)$$



Problème 2 : Pendule conique de longueur variable (20 points)

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Laisser les cases blanches vides



Une bille considérée comme un point matériel P de masse m est attachée à l'extrémité gauche d'un fil inextensible de masse négligeable. Ce fil coulisse sans frottement sec à travers une gaine horizontale attachée au plafond. L'extrémité droite du fil est attachée à un contrepoids considéré comme un point matériel de masse m' . On place l'origine O à l'extrémité gauche de la gaine. La bille a un mouvement de rotation autour de l'axe vertical qui passe par l'origine O alors que le contrepoids a uniquement un mouvement vertical de vecteur unitaire \hat{z} orienté vers le haut. Le système constitué de la bille et du contrepoids est soumis au frottement visqueux de l'air caractérisé par le coefficient de frottement b .

Afin d'étudier la dynamique de la bille, on choisit un repère sphérique $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ d'origine O où le vecteur unitaire radial \hat{r} est orienté le long du fil vers le bas, le vecteur unitaire nodal $\hat{\theta}$ est orthogonal au fil orienté vers le haut et le vecteur unitaire $\hat{\phi}$ est orienté horizontalement dans le sens horaire.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse m de la bille, de la masse m' du contrepoids, du coefficient de frottement visqueux b , de la norme du champ gravitationnel g , des coordonnées sphériques r , θ et ϕ , de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$, et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (3 points) Déterminer la puissance P dissipée par le frottement de l'air dans le système.

Comme le fil est inextensible, la coordonnée de vitesse verticale \dot{z} du contrepois et la coordonnée de vitesse radiale \dot{r} de la bille sont égales, leurs coordonnées d'accélération également,

$$\dot{z} = \dot{r} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \ddot{r}. \quad (1)$$

Ainsi, la force de frottement visqueux de l'air \mathbf{F}_f exercée sur la bille et celle \mathbf{F}'_f exercée sur le contrepois s'écrivent,

$$\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v} = -b\left(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{F}'_f = -b\mathbf{v}' = -b\dot{z}\hat{\mathbf{z}} = -b\dot{r}\hat{\mathbf{z}}. \quad (2)$$

Par conséquent, la puissance dissipée par l'action des forces de frottement de l'air sur la bille et le contrepois s'écrit,

$$P = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}'_f \cdot \mathbf{v}' = -b(v^2 + v'^2) = -b\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right). \quad (3)$$

2. (3 points) Déterminer le vecteur tension \mathbf{T} exercée par le fil sur la bille lorsque le système constitué de la bille et du contrepois n'est pas à l'équilibre en considérant la dynamique du contrepois.

Les forces extérieures exercées sur le contrepois sont son poids \mathbf{P}' , la tension \mathbf{T}' exercée par le fil et la force de frottement visqueux de l'air \mathbf{F}'_f ,

$$\mathbf{P}' = m'g = -m'g\hat{\mathbf{z}} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}' = T'\hat{\mathbf{z}}, \quad (4)$$

où le vecteur unitaire vertical $\hat{\mathbf{z}}$ est orienté vers le haut. Ainsi, le vecteur accélération du contrepois s'écrit,

$$\mathbf{a}' = \ddot{z}\hat{\mathbf{z}} = \ddot{r}\hat{\mathbf{z}}. \quad (5)$$

La loi du mouvement du contrepois s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}'^{\text{ext}} = \mathbf{P}' + \mathbf{T}' + \mathbf{F}'_f = m'\mathbf{a}'. \quad (6)$$

En substituant les forces extérieures (2) et (4) et l'accélération du contrepois (5) dans la loi du mouvement du contrepois (6) et en la projetant selon la ligne de coordonnée verticale compte tenu des identités (1), on obtient l'équation scalaire,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad -m'g + T' - b\dot{r} = m'\ddot{r}. \quad (7)$$

Comme les tensions dans le fil sont des forces intérieures au système formé de la bille et du contrepois, la norme de la tension \mathbf{T} exercée par le fil sur la bille est égale à la norme de la tension \mathbf{T}' exercée par le fil sur le contrepois,

$$\mathbf{T} = -T\hat{\mathbf{r}} = -T'\hat{\mathbf{r}} = -(m'\ddot{r} + b\dot{r} + m'g)\hat{\mathbf{r}}. \quad (8)$$

3. (3 points) Montrer que les équations du mouvement radial et nodal de la bille s'écrivent,

$$(m + m')\ddot{r} + 2b\dot{r} - m\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)r + (m' - m\cos\theta)g = 0, \\ m r \ddot{\theta} + (b r + 2 m \dot{r}) \dot{\theta} + m\left(g - r \dot{\phi}^2 \cos\theta\right) \sin\theta = 0.$$

Les forces extérieures exercées sur la bille sont son poids \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{z}} = mg\left(\cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right), \quad (9)$$

la tension \mathbf{T} exercée par le fil (8) et la force de frottement visqueux \mathbf{F}_f de l'air (2). L'accélération de la bille est,

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{\mathbf{r}} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ + \left(r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (10)$$



La loi du mouvement de la bille s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a}. \quad (11)$$

En substituant les forces extérieures (2), (8) et (9) et l'accélération (10) dans la loi du mouvement (11) et en la projetant selon les lignes de coordonnées sphériques, on obtient les équations scalaires suivantes,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{r}} : \quad mg \cos \theta - m'(\ddot{r} + g) - 2b\dot{r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta), \quad (12)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\theta}} : \quad -mg \sin \theta - br\dot{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta), \quad (13)$$

$$\text{selon } \hat{\boldsymbol{\phi}} : \quad -br \sin \theta \dot{\phi} = m(r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta). \quad (14)$$

La projection de la loi du mouvement selon la ligne de coordonnée radiale (12) est remise en forme comme,

$$(m + m')\ddot{r} + 2b\dot{r} - m(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)r + (m' - m \cos \theta)g = 0, \quad (15)$$

et la projection de la loi du mouvement selon la ligne de coordonnée nodale (13) est remise en forme comme,

$$mr\ddot{\theta} + (br + 2m\dot{r})\dot{\theta} + m(g - r\dot{\phi}^2 \cos \theta) \sin \theta = 0. \quad (16)$$

4. (1 point) Déterminer le vecteur moment cinétique \mathbf{L}_O de la bille évalué par rapport à l'origine O .

Le vecteur moment cinétique \mathbf{L}_O de la bille évalué par rapport à l'origine O s'écrit,

$$\mathbf{L}_O = m \mathbf{r} \times \mathbf{v} = m r \hat{\mathbf{r}} \times (\dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}) = -m r^2 \dot{\phi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + m r^2 \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (17)$$

5. (3 points) Lorsque le fil attaché à la bille est vertical, c'est-à-dire $\theta = 0$ et $\dot{\phi} = 0$, dans le cas où $m > m'$, déterminer la vitesse limite de chute v_∞ de la bille de masse m et l'évolution temporelle de sa vitesse radiale $\dot{r}(t)$ en termes du temps d'amortissement,

$$\tau = \frac{m + m'}{2b},$$

compte tenu de la condition initiale $\dot{r}(0) = 0$.

Lorsque le fil attaché à la bille est vertical, c'est-à-dire $\theta = 0$ et $\dot{\phi} = 0$, l'équation du mouvement radial de la bille (15) se réduit à une machine d'Atwood avec frottement visqueux,

$$\ddot{r} + \frac{1}{\tau} \dot{r} - \frac{m - m'}{m + m'} g = 0, \quad (18)$$

qui est remise en forme comme,

$$\ddot{r} + \frac{1}{\tau} \left(\dot{r} - \frac{m - m'}{2b} g \right) = 0. \quad (19)$$

A grand temps, l'équation du mouvement (19) décrit un mouvement de chute à vitesse constante,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\tau \ddot{r} + \dot{r} - \frac{m - m'}{2b} g \right) = v_\infty - \frac{m - m'}{2b} g = 0. \quad (20)$$

Ainsi, la vitesse limite de chute est,

$$v_\infty = \frac{m - m'}{2b} g = \frac{m - m'}{m + m'} g \tau > 0. \quad (21)$$



A l'aide du changement de variable,

$$u = \dot{r} - v_\infty \quad \text{ainsi} \quad \dot{u} = \dot{r}, \quad (22)$$

l'équation du mouvement radial (19) devient,

$$\dot{u} + \frac{1}{\tau} u = 0. \quad (23)$$

Compte tenu de l'identité $du = \dot{u} dt$ et de la condition initiale $\dot{r}(0) = 0$, l'intégrale par rapport au temps de $t' = 0$ à $t' = t$ de l'équation du mouvement (23) multipliée par dt/u s'écrit,

$$\int_{-v_\infty}^{\dot{r}(t)-v_\infty} \frac{du}{u} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt'. \quad (24)$$

Le résultat de cette intégrale est,

$$\ln \left(\frac{v_\infty - \dot{r}(t)}{v_\infty} \right) = -\frac{t}{\tau}. \quad (25)$$

Ainsi, l'équation de la vitesse est,

$$\dot{r}(t) = v_\infty \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right) = \frac{m - m'}{m + m'} g \tau \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right). \quad (26)$$

6. (2 points) Pour cette question et la suivante, on néglige le frottement de l'air, c'est-à-dire $b \rightarrow 0$. Montrer alors que la composante verticale du moment cinétique $L_z \equiv \mathbf{L}_O \cdot \hat{\mathbf{z}} = m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta$ évalué à l'origine O est constante.

Solution 1: En absence de frottement visqueux, c'est-à-dire $b \rightarrow 0$, l'équation du mouvement azimutal (14) se réduit à,

$$r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta = 0. \quad (27)$$

Par conséquent, la dérivée temporelle de la grandeur L s'annule,

$$\dot{L}_z = m r \sin \theta \left(r \ddot{\phi} \sin \theta + 2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2 r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \right) = 0. \quad (28)$$

Solution 2: Compte tenu des identités $dr = \dot{r} dt$, $d\theta = \dot{\theta} dt$ et $d\dot{\phi} = \ddot{\phi} dt$, l'équation du mouvement azimutal de la bille (27) divisée par $r \dot{\phi} \sin \theta$ peut être mise sous la forme suivante,

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2 \frac{\dot{r}}{r} + 2 \cot \theta \dot{\theta} = 0. \quad (29)$$

Compte tenu des identités $dr = \dot{r} dt$, $d\theta = \dot{\theta} dt$ et $d\dot{\phi} = \ddot{\phi} dt$, l'intégrale par rapport au temps de $t' = 0$ à $t' = t$ de l'équation différentielle (29) multipliée par l'intervalle de temps infinitésimal dt s'écrit formellement,

$$\int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}} \frac{d\dot{\phi}'}{\dot{\phi}'} + 2 \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'} + 2 \int_{\theta_0}^{\theta} \cot \theta' d\theta' = 0. \quad (30)$$

La solution de l'intégrale est,

$$\ln \left(\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} \right) + 2 \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + 2 \ln \left(\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} \right) = \ln \left(\frac{r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta}{r_0^2 \dot{\phi}_0 \sin^2 \theta_0} \right) = 0. \quad (31)$$

Ainsi, par exponentiation de ce résultat,

$$m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = m r_0^2 \dot{\phi}_0 \sin^2 \theta_0. \quad (32)$$

ce qui signifie que la composante verticale du moment cinétique L_z évalué à l'origine est une constante du mouvement,

$$L_z = m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta = \text{cste}. \quad (33)$$



7. (5 points) Lorsque le contrepoids est immobile, déterminer l'angle d'inclinaison constant θ_0 du fil de la bille et la norme de l'accélération centripète a_c de la bille uniquement en termes des masses m et m' et du champ gravitationnel g . Déterminer la condition qui doit être satisfaite pour que le contrepoids puisse être immobile.

Lorsque le contrepoids est immobile et que l'angle d'inclinaison est constant,

$$\begin{aligned} r &= r_0 = \text{cste} & \text{ainsi} & \quad \dot{r} = 0 & \text{et} & \quad \ddot{r} = 0, \\ \theta &= \theta_0 = \text{cste} & \text{ainsi} & \quad \dot{\theta} = 0 & \text{et} & \quad \ddot{\theta} = 0, \\ \dot{\phi} &= \dot{\phi}_0 = \text{cste} & \text{ainsi} & \quad \ddot{\phi} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Les équations du mouvement radial (12) et nodal (13) se réduisent à,

$$\text{selon } \hat{r} : \quad mg \cos \theta_0 - m'g = -m r_0 \dot{\phi}_0^2 \sin^2 \theta_0, \quad (35)$$

$$\text{selon } \hat{\theta} : \quad -mg \sin \theta_0 = -m r_0 \dot{\phi}_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0. \quad (36)$$

En prenant la différence entre l'équation (35) multipliée par $\cos \theta_0$ et l'équation (36) multipliée par $\sin \theta_0$, on obtient,

$$mg (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) - m'g \cos \theta_0 = 0. \quad (37)$$

Par conséquent,

$$\cos \theta_0 = \frac{m}{m'} \quad \text{ainsi} \quad \theta_0 = \arccos \left(\frac{m}{m'} \right). \quad (38)$$

Pour que le contrepoids puisse être immobile, il faut que la masse de la bille soit inférieure ou égale à celle du contrepoids,

$$\cos \theta_0 \leq 1 \quad \text{ainsi} \quad m \leq m'. \quad (39)$$

La norme de l'accélération centripète est obtenue en substituant l'identité (39) dans l'équation du mouvement de la bille (36),

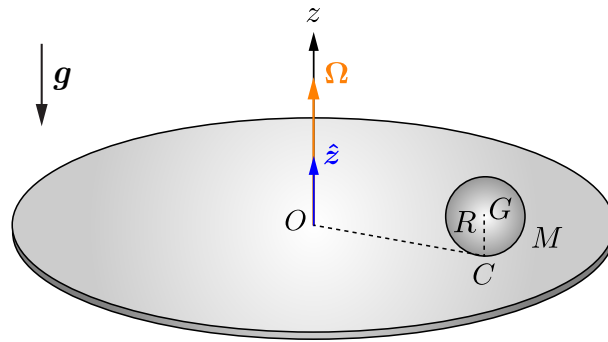
$$a_c = r_0 \sin \theta_0 \dot{\phi}_0^2 = g \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = \frac{g}{\cos \theta_0} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0} = g \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_0} - 1} = g \sqrt{\frac{m'^2}{m^2} - 1}. \quad (40)$$



Problème 3 : Sphère roulant sans glisser sur un disque tournant (17 points)

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ ₅ ₆ ₇ ₈ ₉ ₁₀ ₁₁ ₁₂ ₁₃ ₁₄ ₁₅
₁₆ ₁₇

Laisser les cases blanches vides



Une sphère de masse M , de rayon R et de moment d'inertie I_G , par rapport à un axe passant par son centre de masse G , roule sans glisser sur un disque. Le moment d'inertie de la sphère s'écrit,

$$I_G = \lambda MR^2 \quad \text{où} \quad \frac{2}{5} \leq \lambda \leq \frac{2}{3}.$$

Le disque est en rotation à vitesse angulaire constante,

$$\Omega = \Omega \hat{z} = \text{cste},$$

autour de son axe de symétrie dans le sens trigonométrique en vue d'avion par rapport au référentiel d'inertie du sol. Le vecteur vitesse angulaire de rotation propre de la sphère ω a une orientation quelconque. L'origine O est située à l'intersection entre l'axe de symétrie et le disque. On note C le point de contact entre la sphère et le disque. Le vecteur position du centre de masse de la sphère \mathbf{R}_G est lié au vecteur position du point de contact \mathbf{R}_C par la relation,

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_C + R \hat{z}.$$

Le frottement statique dans le plan du disque permet le roulement sans glissement de la sphère sur le disque, mais il n'y a pas de frottement cinétique sec ou visqueux à prendre en considération.

Ce problème est à résoudre vectoriellement en utilisant l'identité suivante pour trois vecteurs d'orientation quelconque \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} ,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M , du rayon R , des vecteurs vitesses angulaires Ω et ω , de la vitesse angulaire scalaire Ω , du coefficient λ , du vecteur position \mathbf{R}_G , du vecteur vitesse \mathbf{V}_G et du vecteur accélération \mathbf{A}_G du centre de masse G de la sphère, du vecteur unitaire vertical \hat{z} et des grandeurs scalaires et vectorielles spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes



1. (2 points) A l'aide de la condition vectorielle de roulement sans glissement de la sphère sur le disque, montrer que la vitesse du centre de masse de la sphère s'écrit,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_G + R\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}.$$

La relation qui lie la vitesse du centre de masse de la sphère \mathbf{V}_G et la vitesse \mathbf{V}_C du point de contact entre la sphère et le disque s'écrit,

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CG} = \mathbf{V}_C + R\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (1)$$

Pour un roulement sans glissement, la vitesse relative du point de contact entre la sphère et le disque est nulle. Cela signifie que le point de contact C a un mouvement circulaire dû à la rotation du disque décrite par le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$,

$$\mathbf{V}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_C = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{R}_G - R\hat{\mathbf{z}}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_G - R\Omega \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_G. \quad (2)$$

Par conséquent, on déduit la condition de roulement sans glissement des relations (1) et (2),

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_G + R\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (3)$$

2. (4 points) A l'aide du théorème du moment cinétique évalué au centre de masse G et du théorème du centre de masse, montrer que l'accélération angulaire de rotation propre de la sphère s'écrit,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{1}{\lambda R} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}_G \quad \text{en déduire que} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \text{cste}.$$

Les forces extérieures exercées sur la sphère sont son poids \mathbf{P} , la force de réaction normale du sol \mathbf{N} et la force de frottement statique \mathbf{F}_s entre le sol et la sphère. Le théorème du moment cinétique évalué par rapport à un axe qui passe par le centre de masse de la sphère G s'écrit,

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \mathbf{M}_G(\mathbf{P}) + \mathbf{M}_G(\mathbf{N}) + \mathbf{M}_G(\mathbf{F}_s) = I_G \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (4)$$

où les moments de force sont,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G(\mathbf{P}) &= \mathbf{GG} \times M\mathbf{g} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{N}) &= \mathbf{GC} \times \mathbf{N} = -RN \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_G(\mathbf{F}_s) &= \mathbf{GC} \times \mathbf{F}_s = -R \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{F}_s. \end{aligned} \quad (5)$$

Par conséquent, le vecteur accélération angulaire de la sphère est donnée par le théorème du moment cinétique (4),

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{R}{I_G} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{F}_s. \quad (6)$$

Le théorème du centre de masse s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_s = M \mathbf{A}_G, \quad (7)$$

où le poids et la force de réaction normale se compensent,

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Par conséquent, le théorème du centre de masse se réduit à,

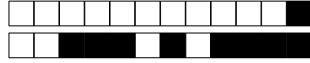
$$\mathbf{F}_s = M \mathbf{A}_G. \quad (9)$$

En substituant la force de frottement statique (9) dans le théorème du moment cinétique (6), l'accélération angulaire devient,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{MR}{I_G} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}_G = -\frac{1}{\lambda R} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}_G. \quad (10)$$

Il s'en suit que la composante verticale de l'accélération angulaire propre de la sphère est nulle,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{\lambda R} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}_G) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \text{cste}. \quad (11)$$



3. (2 points) Montrer que le mouvement du centre de masse est décrit par l'équation vectorielle suivante,

$$\mathbf{A}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{V}_G .$$

Déterminer le vecteur vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}'$ du centre de masse G de la sphère.

La dérivée temporelle de la condition de roulement sans glissement (3) s'écrit,

$$\mathbf{A}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_G + R \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{z}} . \quad (12)$$

En substituant l'accélération angulaire (10) dans la dérivée temporelle de la relation de roulement sans glissement (12), on obtient l'équation vectorielle suivante,

$$\mathbf{A}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_G - \frac{1}{\lambda} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{A}_G) \times \hat{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_G - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}_G , \quad (13)$$

qui est remise en forme comme,

$$\mathbf{A}_G = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{V}_G , \quad (14)$$

où le vecteur vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}'$ du centre de masse G de la sphère est lié au vecteur vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ du disque par la relation,

$$\boldsymbol{\Omega}' = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)} \boldsymbol{\Omega} . \quad (15)$$

4. (3 points) Montrer que le centre de masse G de la sphère a un mouvement circulaire de vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega}'$ autour du point fixe A décrit par l'équation,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \quad \text{en déduire que} \quad \mathbf{A}_G = -\boldsymbol{\Omega}'^2 (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) .$$

Déterminer le vecteur position \mathbf{R}_A du centre A de la trajectoire circulaire à l'aide des conditions initiales sur la position $\mathbf{R}_{G,0}$ et la vitesse $\mathbf{V}_{G,0}$ du centre de masse G compte tenu de l'identité vectorielle,

$$\mathbf{V}_{G,0} = -\frac{1}{\boldsymbol{\Omega}'^2} \boldsymbol{\Omega}' \times (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{V}_{G,0}) .$$

L'intégration de l'équation du mouvement (14) par rapport au temps de $t' = 0$ à $t' = t$ s'écrit formellement,

$$\int_0^t \dot{\mathbf{V}}_G dt' = \boldsymbol{\Omega}' \times \int_0^t \dot{\mathbf{R}}_G dt' . \quad (16)$$

La solution de cette intégrale est,

$$\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_{G,0} = \boldsymbol{\Omega}' \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_{G,0}) , \quad (17)$$

qui est remise en forme comme,

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times \left(\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_{G,0} - \frac{1}{\boldsymbol{\Omega}'^2} (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{V}_{G,0}) \right) . \quad (18)$$

La vitesse du centre de masse G de la sphère s'écrit

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) . \quad (19)$$

où la position du centre A du mouvement circulaire est,

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{R}_{G,0} + \frac{1}{\boldsymbol{\Omega}'^2} (\boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{V}_{G,0}) = \mathbf{R}_{G,0} + \frac{1}{\boldsymbol{\Omega}'^2} (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{V}_{G,0}) . \quad (20)$$

En substituant la vitesse du centre de masse (19) dans l'équation du mouvement (14), on obtient l'accélération du centre de masse de la sphère,

$$\mathbf{A}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times \left(\boldsymbol{\Omega}' \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \right) = -\boldsymbol{\Omega}'^2 (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) . \quad (21)$$



5. (1 point) Pour une sphère homogène pleine de coefficient $\lambda = 2/5$, déterminer le rapport de la période de rotation T' du centre de masse G de la sphère autour du point A et de la période de rotation T du disque.

Compte tenu de la vitesse angulaire de rotation Ω' constante du centre de masse G de la sphère (15), le rapport de la période de rotation T' du centre de masse de la sphère et de la période de rotation T du disque s'écrit,

$$\frac{T'}{T} = \frac{2\pi}{\Omega'} \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\Omega}{\Omega'} = \frac{1+\lambda}{\lambda} = \frac{7}{2}.$$

6. (1 point) Déterminer le vecteur force de frottement statique \mathbf{F}_s exercé par le disque sur la sphère en termes des vecteurs positions \mathbf{R}_G et \mathbf{R}_A et du vecteur vitesse angulaire Ω' .

Compte tenu de l'équation du mouvement (9) et de l'accélération du centre de masse (21) orientée radialement vers la point A , la force de frottement statique s'écrit,

$$\mathbf{F}_s = M \mathbf{A}_G = -M \Omega'^2 (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A). \quad (22)$$

7. (2 points) Montrer que le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de rotation propre de la sphère s'écrit,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{\Omega'}{\lambda R} (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_{G,0}),$$

où $\boldsymbol{\omega}_0$ est la vitesse angulaire de rotation propre initiale.

L'intégration de l'équation du mouvement (10) par rapport au temps de $t' = 0$ à $t' = t$ s'écrit formellement,

$$\int_0^t \dot{\boldsymbol{\omega}} dt' = -\frac{1}{\lambda R} \hat{\mathbf{z}} \times \int_0^t \dot{\mathbf{V}}_G dt'. \quad (23)$$

La solution de cette intégrale est,

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 = -\frac{1}{\lambda R} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{V}_G - \mathbf{V}_{G,0}), \quad (24)$$

Compte tenu de la vitesse (19) du centre de masse G de la sphère, la vitesse angulaire (24) devient,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{1}{\lambda R} \hat{\mathbf{z}} \times (\Omega' \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_{G,0})) = \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{\Omega'}{\lambda R} \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_{G,0})), \quad (25)$$

et se réduit à,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{\Omega'}{\lambda R} (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_{G,0}). \quad (26)$$

8. (2 points) Montrer que la composante verticale du vecteur moment cinétique de la sphère,

$$\mathbf{L}_A = M (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{V}_G + I_G \boldsymbol{\omega},$$

évaluée au centre A de la trajectoire circulaire est constante.

Etant donné que le vecteur \mathbf{R}_A est constant, la dérivée temporelle du moment cinétique s'écrit,

$$\dot{\mathbf{L}}_A = M \mathbf{V}_G \times \mathbf{V}_G + M (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{A}_G + I_G \dot{\boldsymbol{\omega}}, \quad (27)$$

et sa composante verticale est,

$$\dot{\mathbf{L}}_A \cdot \hat{\mathbf{z}} = M \left((\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \times \mathbf{A}_G \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + I_G (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{z}}). \quad (28)$$



A l'aide de l'accélération du centre de masse (21), compte tenu du fait que la composante verticale de l'accélération angulaire de rotation propre (11) est nulle, la composante verticale de la dérivée temporelle du moment cinétique (28) est nulle,

$$\dot{\mathbf{L}}_A \cdot \hat{\mathbf{z}} = -M \Omega'^2 \left((\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \times (\mathbf{R}_G - \mathbf{R}_A) \right) \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0. \quad (29)$$

Par intégration temporelle de l'équation (29), on en conclut que la composante verticale du moment cinétique évalué au point A est constante,

$$\mathbf{L}_A \cdot \hat{\mathbf{z}} = \text{cste}, \quad (30)$$

comme il se doit pour un mouvement circulaire.